Эти выражения с точностью до значений постоянных C_1 и C_2 совпадают с (4.93). Используя (4.101) и граничные условия (4.94), найдем из них C_1 и C_2 и придем к формулам (4.95), выражающим решение этой задачи. Заметим попутно, что при известных напряжениях легко определяются и перемещения u с помощью формулы $\varepsilon_\Theta = u/r = (\sigma_\Theta - \mu\sigma_r)/E$, откуда

$$u = \frac{1}{E}(\sigma_\Theta - \mu\sigma_r)\,r. \tag{4.102}$$

Заметим, что функция φ (4.99) и формулы (4.100) дают более богатый набор осесимметричных полей напряжений, чем в задаче Ляме. Любопытным является вопрос, почему решение в перемещениях дало единственное осесимметричное поле напряжений (задача Ляме), а решение в напряжениях — множество таких полей. Ответ состоит в том, что в первом случае осесимметричными являются как поле напряжений, так и поле перемещений и такое решение (при $u \neq 0$ и $v = 0$) действительно единственное и выражается задачей Ляме. Во втором случае осесимметрично только поле напряжений (4.100) и соответствующие им деформации, а перемещения u и v в общем случае не симметричны.

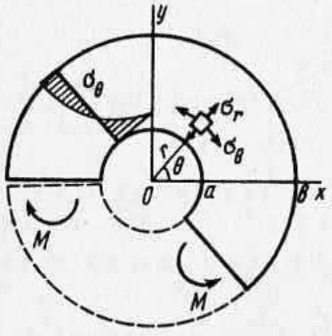

Рис. 4.46

Примером указанного состояния может служить изгиб кривого бруса с сечением в виде прямоугольника $(b - a) \times 1$ под действием моментов M (рис. 4.46).

Решение этой задачи, найденное Х. С. Головиным в 1881 г., может быть получено по формулам (4.100), в которых три постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из трех условий: равенства нулю σ_r на границах $r = a$ и $r = b$ и того, что эпюра напряжений σ_Θ в радиальном сечении приводится к моменту M. Во всех радиальных сечениях, включая сечения, где приложены моменты M, напряжения одинаково распределены, т. е. поле напряжений полярно-симметрично. В то же время перемещения u и v будут несимметричны.

§ 4.13. НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ

Действие силы на край упругой полуплоскости (задача Фламана). Под упругой полуплоскостью понимается бесконечная пластина толщиной, равной единице, ограниченная плоскостью $x = 0$ (рис. 4.47). Пусть перпендикулярно ее краю приложена сила P, равномерно распределенная по толщине. Такая пластина будет испытывать плоское напряженное состояние.

На рис. 4.48 показано загружение упругого полупространства (т. е. бесконечного объема упругого материала, ограниченного плоскостью $x = 0$) линейно распределенной нагрузкой интенсивности $P = \text{const}$. Слой единичной толщины, выделенный из полупространства, также соответствует условиям рассматриваемой задачи, но будет испытывать плоское деформированное состояние. В подобных условиях находится основание под очень длинным равномерно загруженным ленточным фундаментом. Распределение напряжений

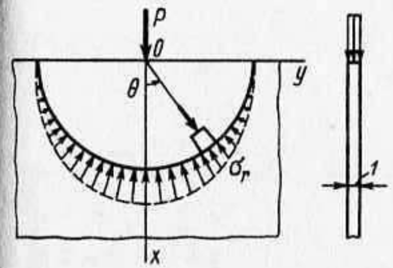

Рис. 4.47

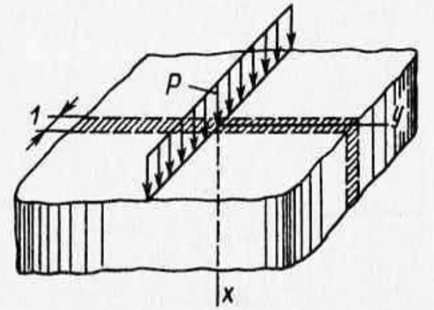

Рис. 4.48

в плоскости $x - y$, как известно, в указанных случаях будет одинаковым (см. § 4.2).

Функцию φ, удовлетворяющую уравнению совместности деформаций (4.88), задаем в виде

$$\varphi = Kr\,\Theta\sin\Theta, \tag{4.103}$$

где $K = \text{const}$. По формулам (4.84) вычисляем напряжения:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Theta^2} = 2K\frac{1}{r}\cos\Theta;\\ \sigma_\Theta &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0;\quad \tau_{r\Theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.104}$$

Как видим, функции φ (4.103) соответствует в каждой точке пластины линейное напряженное состояние с напряжением σ_r в направлении радиуса r. Такое поле напряжений называют радиальным (см. рис. 4.47).

Для определения константы K вырежем из пластины полукруг радиуса r (рис. 4.49). Элементарные силы $\sigma_r\,dS$ пересекаются в точке O; следовательно, они приводятся к силе, как их равнодействующей, приложенной в этой точке. Сумма проекций всех сил на ось x дает

$$P + 2\int_0^{\pi/2}\sigma_r\,ds\cos\Theta = P + 4K\int_0^{\pi/2}\cos^2\Theta\,d\Theta = P + K\pi = 0.$$

Отсюда получаем $K = -P/\pi$ и окончательное выражение для напряжений

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r}\cos\Theta. \tag{4.105}$$

При $r \to 0$ $\sigma_r \to \infty$. Эта особенность в точке O связана с идеализацией сосредоточенной силы конечной величины P, передаваемой через бесконечно малую площадь. При реальном приложении воздействия типа сосредоточенной силы образуется контактная зона малых, но конечных размеров. Поэтому в некотором объеме малого радиуса $r = \delta$ распределение напряжений будет отличным от описываемого выражением (4.105). При $r > \delta$, согласно принципу Сен-Венана, оно будет соответствовать этому выражению (4.105) (см. также § 5.5).

Зная распределение напряжений в полярной системе координат, легко можно перейти к напряжениям σ_x, σ_y, τ_{xy} в декартовой систе-

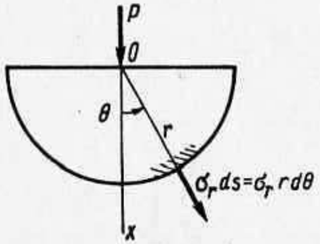

Рис. 4.49

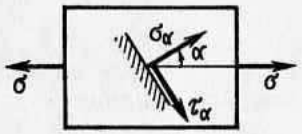

Рис. 4.50

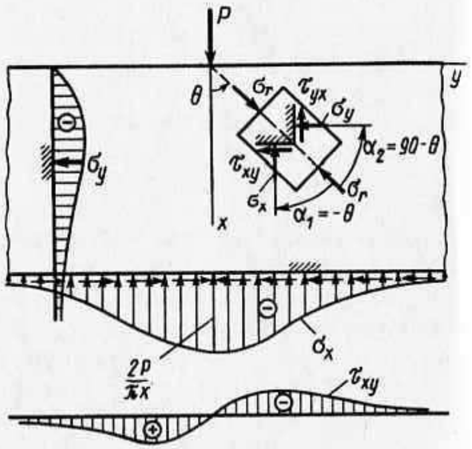

Рис. 4.51

ме, что бывает нужным при решении различных прикладных задач. Напомним формулы для напряжений σ_α и τ_α при одноосном напряженном состоянии (рис. 4.50):

$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\,\sigma; \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha. \qquad (4.106)$$

Подставляя в эти формулы для горизонтальной площадки $\alpha_1 = -\Theta$, а для вертикальной $\alpha_2 = 90 - \Theta$ (рис. 4.51) и выражение для σ_r (4.105), получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi r}\cos^3\Theta; \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi r}\sin\Theta\cos^2\Theta; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi r}\cos\Theta\sin^2\Theta. \end{aligned}\right\} \qquad (4.107)$$

Заменяя по формулам $\sin\Theta = y/r$; $\cos\Theta = x/r$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, выражения (4.107) легко записать полностью в декартовой системе координат. На рис. 4.51 показано распределение напряжений в горизонтальном и вертикальном сечениях.

Важная роль решения Фламана состоит в том, что формулы этого решения могут играть роль функций влияния для произвольной нагрузки q, приложенной к краю основания. Пусть, например, от некоторой заданной нагрузки $q(y_1)$ требуется вычислить напряжение в точке $\sigma_x(x, y)$ (рис. 4.52). Обозначим выражение для σ_x (4.107) при $P = 1$ через $\Phi(x, y)$, которое называют функцией влияния единичной силы на напряжения σ_x. Тогда от элементарной силы $\mathrm{d}P = q(y_1)\,\mathrm{d}y_1$, в рассматриваемой точке возникает напряжение

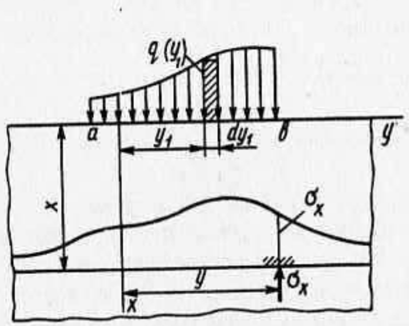

Рис. 4.52

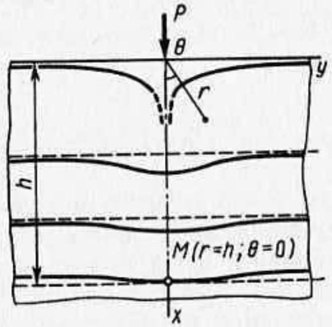

Рис. 4.53

$\mathrm{d}\sigma_x = \Phi(x, y - y_1)\,q(y_1)\,\mathrm{d}y_1$, а полное напряжение σ_x в этой точке от нагрузки q получим, суммируя влияние всех элементарных сил на участке ab:

$$\sigma_x = \int_a^b \mathrm{d}\sigma_x = \int_a^b \Phi(x, y-y_1)\,q(y_1)\,\mathrm{d}y_1. \qquad (4.108)$$

С помощью выражений типа (4.108) и соответствующих функций влияния можно вычислить любые факторы в основании от воздействий приложенных на его крае.

В заключение остановимся на определении перемещений u, v в точках упругой полуплоскости от силы P. При известных напряжениях σ_r (4.105) и $\sigma_\Theta = \tau_{r\Theta} = 0$ по закону Гука определяем деформации ε_r, ε_Θ и $\gamma_{r\Theta}$ и подставляем их в геометрические уравнения (4.82). В результате получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E r}\cos\Theta; \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\Theta} + \frac{u}{r} = \mu\,\frac{2P}{\pi E r}\cos\Theta; \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\Theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.109)$$

Интегрируя эти уравнения совершенно аналогично тому, как это было показано на примерах в § 2.6, получим выражения u и v, в которые войдут три произвольные постоянные, которые надо определить исходя из условий закрепления деформируемого элемента как жесткого целого. В данном случае примем условия закрепления упругой полуплоскости такими: некоторая точка M, лежащая на оси симметрии на глубине $r = h$, неподвижна, что дает условия $u_M = 0$; $v_M = 0$ (рис. 4.53). Третье уравнение составим как условие симметрии, в качестве которого примем отсутствие поворота горизонтальных элементов на оси симметрии: $\partial u/\partial\Theta = 0$ при $\Theta = 0$. В результате придем к выражениям для радиального и тангенциального перемещений u и v:

$$u = \frac{2P}{\pi E}\ln\frac{h}{r}\cos\Theta - \frac{(1-\mu)P}{\pi E}\Theta\sin\Theta; \tag{4.110}$$

$$v = -\frac{2P}{\pi E}\ln\frac{h}{r}\sin\Theta - \frac{(1-\mu)P}{\pi E}\Theta\cos\Theta + \frac{(1+\mu)P}{\pi E}\sin\Theta. \tag{4.111}$$

Для точек правой полуоси y следует положить $r = y$, $\Theta = \pi/2$, и тангенциальные перемещения v дадут вертикальную компоненту перемещений края полуплоскости. Знак минус указывает, что они происходят в направлении убывания координаты Θ, т. е. вниз. Меняя этот знак на обратный, получим выражение для прогибов правого края полуплоскости в виде

$$v = \frac{P}{\pi E}\left[2\ln\frac{h}{y} - (1+\mu)\right]. \tag{4.112}$$

Для левого края они симметричны [для этого y надо в (4.112) принимать по абсолютному значению]. На рис. 4.53 показаны эпюры вертикальных прогибов для края полуплоскости по (4.112), а на других уровнях — по выражениям (4.110), (4.111).

Как видим, в точке приложения силы имеется особенность в перемещениях: они, как и напряжения, стремятся к бесконечности. Это, как уже указывалось, является следствием схематизации сосредоточенной силы, приложенной в точке. Если воспользоваться выражениями (4.112) или (4.110), (4.111) как функциями влияния, то по выражению типа (4.108) от распределенной нагрузки, приложенной к краю, получим конечные перемещения.

Действие силы на острие бесконечного клина. Эти задачи (рис. 4.54, 4.55) являются обобщением задачи Фламана. Приняв функцию напряжений в том же виде, что и (4.103), придем к радиальному полю напряжений (4.104). Константу K найдем из условия равновесия части клина, выделенной окружным сечением, аналогично рис. 4.49. Угол Θ отсчитываем от направления силы P (от оси x). По сравнению с рис. 4.49 при определении K изменятся лишь пределы интегрирования: вместо пределов от $\Theta = 0$ до $\Theta = \pi/2$ интегрировать надо от $\Theta = 0$ до $\Theta = \alpha$ (рис. 4.54) и от $\Theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ до $\Theta = \frac{\pi}{2}$ (рис. 4.55). В результате напряжения σ_r будут (соответственно для рис. 4.54 и 4.55)

$$\sigma_r = -\frac{P}{\alpha + 0{,}5\sin 2\alpha}\,\frac{\cos\Theta}{r}; \tag{4.113}$$

$$\sigma_r = -\frac{P}{\alpha - 0{,}5\sin 2\alpha}\,\frac{\cos\Theta}{r}. \tag{4.114}$$

При $\alpha = \pi/2$ формулы (4.113) и (4.114) приводят к (4.105). При этом случай, изображенный на рис. 4.55, соответствует загружению упругой полуплоскости силой P, параллельной ее краю (рис. 4.56).

Имеются и другие точные решения для бесконечного клина. Они, в частности, могут быть использованы для проверки и уточнения

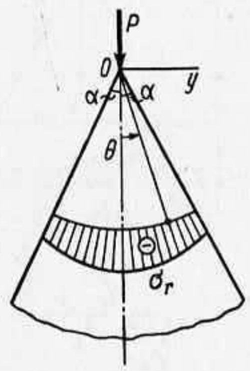

Рис. 4.54

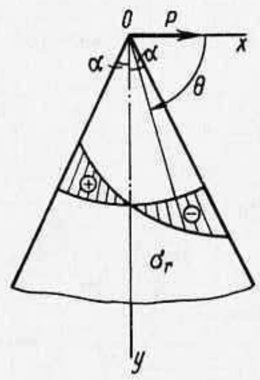

Рис. 4.55

элементарных формул сопротивления материалов. Так, например, в случае изгиба клина (см. рис. 4.55) для напряжений σ_y и τ_{yx} в сечении, параллельном оси x, с использованием (4.114) и (4.106) получим формулы

$$\sigma_y = -\frac{P}{\alpha - 0{,}5\sin 2\alpha}\,\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}; \tag{4.115}$$

$$\tau_{yx} = -\frac{P}{\alpha - 0{,}5\sin 2\alpha}\,\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}. \tag{4.116}$$

На рис. 4.57 для $\alpha = 30°$ по этим выражениям построены эпюры σ_y и τ_{yx}, пунктиром нанесены эпюры тех же напряжений, найденных по элементарным формулам сопротивления материалов, в которых переменность сечения не учитывается. Как видим, учет переменности сечения особенно необходим для касательных напряжений.

Растяжение пластины с круглым отверстием (задача Кирша). Пусть радиус отверстия a в несколько раз меньше ширины пластины. Тогда можно считать, что имеем бесконечную пластину, растянутую напряжением $\sigma_x = \sigma$ и имеющую отверстие радиуса a (рис. 4.58). Выделим из пластины кольцо достаточно большого радиуса $r = b$. Вдали от отверстия имеется простое растяжение $\sigma_x = \sigma$, поэтому по формулам (4.106) для наклонных площадок найдем напряжения