

§ 5.3. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ УЗКОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Для стержня прямоугольного поперечного сечения линии уровня и поверхность $z = F(x, y)$ имеют вид, показанный на рис. 5.6, однако получить выражение функции F значительно труднее, чем в случае стержня круглого сечения. В том случае, когда сечение имеет форму прямоугольника, вытянутого в одном направлении так, что одна его сторона во много раз меньше другой стороны (рис. 5.7, а), с помощью мембранной аналогии легко можно найти приближенное решение.

В местах, удаленных от коротких сторон, поверхность мембраны приближенно может быть принята в виде цилиндрической поверх-

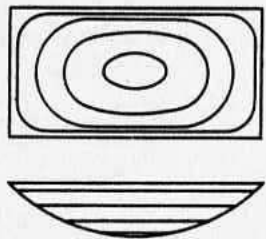


Рис. 5.6

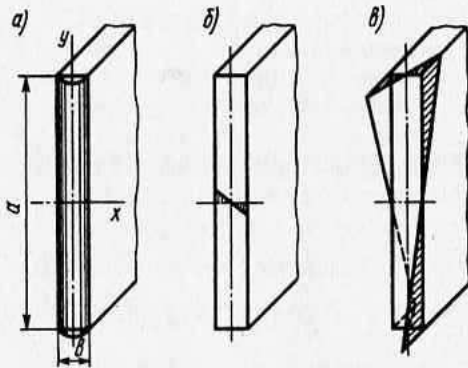


Рис. 5.7

ности с образующей, параллельной длинным сторонам. В соответствии с этим замечанием примем функцию напряжений в виде (рис. 5.7, а)

$$F(x, y) = c \left(x^2 - \frac{b^2}{4} \right). \quad (5.25)$$

На длинных сторонах она удовлетворяет условию $F = 0$. Подставив выражение (5.25) в уравнение (5.22), найдем $c = -\frac{G\theta}{l}$. Тогда

$$\tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = 2G \frac{\theta}{l} x, \quad (5.26)$$

т. е. напряжения τ_{zy} распределены вдоль оси x по линейному закону и наибольшее значение принимают на длинных сторонах прямоугольника (рис. 5.7, б):

$$\tau_{zy}^{\max} = G \frac{\theta}{l} b. \quad (5.27)$$

Из соотношения (5.24) имеем

$$M_{кр} = G \frac{\theta}{l} \frac{ab^3}{3}.$$

Напряжения τ_{yz} связаны с моментом равенством

$$\tau_{zy} = \frac{6M}{ab^3} x; \quad \tau_{zy}^{\max} = \frac{3M}{ab^3}.$$

Зная функцию напряжений $F(x)$, получим из соотношений (5.21)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x.$$

Отсюда найдем функцию кручения:

$$\varphi(x, y) = xy + c_1.$$

Константа c_1 , как и в стержне круглого сечения, определяется из граничных геометрических условий. Принимая, что центр кручения поперечного сечения ($x = y = 0$) не смещается в направлении оси z , имеем $c_1 = 0$.

Таким образом, окончательно для деформации сечения стержня получим выражение

$$w = \frac{\theta}{l} xy.$$

Картина деформации при кручении стержня показана на рис. 5.7, в.

§ 5.4. СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО (ЗАДАЧА БУССИНЕСКА)

В § 4.13 была рассмотрена задача о действии сосредоточенной силы на полуплоскость. Близкой к этой задаче, хотя и более сложной является задача о действии на полупространство сосредоточенной силы, приложенной нормально к плоскости B , ограничивающей полупространство (рис. 5.8).

Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой приложения силы, а вдоль линии ее действия направим ось z . Две другие оси располагаются произвольно (в силу симметрии задачи относительно оси z) в плоскости B .

Напряжения, возникающие в теле, должны удовлетворять следующим граничным условиям: на бесконечности все компоненты тензора напряжений обращаются в нуль; в точках плоскости B касательные напряжения τ_{zx} , τ_{zy} равны нулю, а нормальные напряжения σ_z равны нулю во всех точках, за исключением точки приложения силы F .

Опуская математические рассуждения, приведем окончательные выражения для напряжений в точке M с координатами x , y , z

(рис. 5.9):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{3F}{2\pi} \frac{z^3}{R^5}; \\ \sigma_x &= -\frac{3F}{2\pi} \left\{ \frac{x^2 z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left[\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{(R+z)^2 R^3} + \frac{z}{R^3} \right] \right\}; \\ \sigma_y &= -\frac{3F}{2\pi} \left\{ \frac{y^2 z}{R^5} + \frac{1-2\mu}{3} \left[\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{(R+z)^2 R^3} + \frac{z}{R^3} \right] \right\}; \\ \tau_{zx} &= -\frac{3F}{2\pi} \frac{xz^2}{R^5}; \\ \tau_{zy} &= -\frac{3F}{2\pi} \frac{yz^2}{R^5}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{3F}{2\pi} \left[\frac{xyz}{R^5} - \frac{1-2\mu}{3} \frac{(2R+z)xy}{(R+z)^2 R^3} \right], \end{aligned} \right\} (5.28)$$

где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Анализ напряженного состояния в точке M показывает, что полное напряжение p (геометрическая сумма напряжений σ_z и τ_{zr}), действующее на горизонтальной площадке в меридиональной пло-

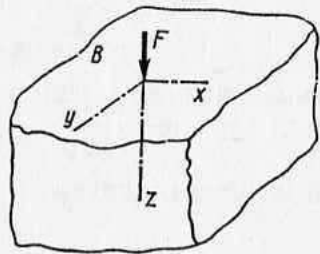


Рис. 5.8

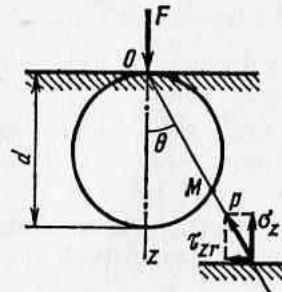


Рис. 5.9

кости, проходящей через ось z , всегда направлено к началу координат [к точке приложения сосредоточенной силы (рис. 5.9)] и равно

$$p = -\frac{3F}{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{R^2}.$$

Учитывая зависимость

$$\frac{R}{\cos \theta} = d,$$

можно записать

$$p = -\frac{3F}{2\pi d^3}. \quad (5.29)$$

Таким образом, во всех точках сферы диаметром d , касающейся точки O , полное напряжение p на горизонтальной площадке одинаково и определяется соотношением (5.29). С уменьшением диаметра

сферы напряжения p возрастают так, что в окрестности точки O они достигают больших значений, вследствие чего материал там находится в пластическом состоянии. Поэтому выражения (5.28) справедливы только в точках, достаточно удаленных от точки O . Заметим, что в рассматриваемой задаче ситуация оказывается сходной с той, которая наблюдалась в задаче Фламана (задача о действии сосредоточенной силы на полуплоскость).

По известным напряжениям могут быть найдены перемещения u, v, w . Ограничимся выражением для перемещения w

$$w = \frac{(1+\mu)F}{2\pi E} \left[\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1-\mu)}{R} \right].$$

В частности, вертикальные перемещения точек плоскости B (см. рис. 5.8) определяются равенством

$$w = \frac{(1-\mu^2)F}{\pi ER}.$$

Решение задачи о действии на полупространство нагрузки, отличной от одной сосредоточенной силы, легко может быть получено на основании принципа суперпозиции из рассмотренной задачи.

Пусть, например, в некоторой области плоской грани полупространства (рис. 5.10) приложена нормальная распределенная нагрузка $q(x, y)$. Выделяя из этой области элементарную площадку dA и заменяя нагрузку, приходящуюся на нее, сосредоточенной силой, равной равнодействующей $q dA$, найдем значения напряжений и перемещений, возникающих в точках полупространства. Производя интегрирование по площади области A , получим полные значения указанных факторов.

В дальнейшем потребуется функция w , определяющая вертикальные перемещения точек плоскости $z = 0$. С учетом изложенного найдем

$$w = \frac{1-\mu^2}{\pi E} \iint \frac{q}{R} dA. \quad (5.30)$$

Детальный анализ распределения напряжений и деформаций в полупространстве при действии на него сосредоточенной силы или нагрузки, приложенной по некоторой области A , показывает, что и напряженное и деформированное состояния имеют локальный характер. Действительно, при удалении точек M (см. рис. 5.9) от точек приложения нагрузки, например, напряжения уменьшаются пропорционально отношению $1/R^2$. Это означает, что если область приложения нагрузки A имеет характерный размер l , то в точках, удаленных от области A на расстояние, значительно большее l , напряжения и деформации будут значительно меньше тех, которые имеют

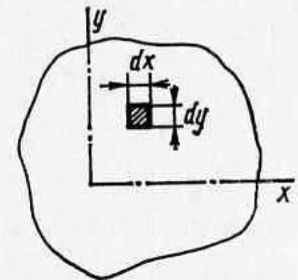


Рис. 5.10

место в окрестности области A . Отсюда следует, что в случае нагрузки, приложенной в области A к упругому телу с криволинейной поверхностью, наименьший радиус кривизны которой значительно превышает размер l , распределение напряжений и деформаций в теле будет почти таким же, как и в полупространстве при действии на него той же нагрузки.

§ 5.5. ЗАДАЧА О ДАВЛЕНИИ ДВУХ ТЕЛ ДРУГ НА ДРУГА

Рассмотрим два упругих тела, имеющих гладкую криволинейную поверхность, которые в исходном состоянии соприкасаются друг с другом в точке O (рис. 5.11). Выберем эту точку за начало координат и совместим оси x и y с касательной плоскостью, общей для обоих тел. Ось z перпендикулярна касательной плоскости, и для каждого тела ее положительное направление совпадает с направлением внутренней нормали.

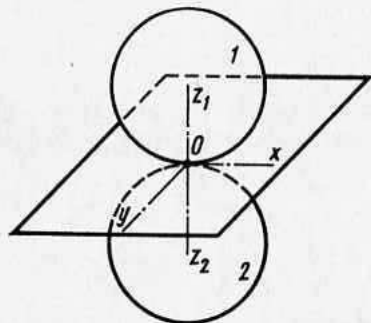


Рис. 5.11

Для вычисления расстояния между противоположными точками тел воспользуемся разложением функций

$$z_1 = f_1(x, y); \quad z_2 = f_2(x, y),$$

которыми описываются поверхности тел в окрестности контакта, в ряд Тейлора, удерживая в нем первые три члена. При этом очевидно, что константа и члены, содержащие пер-

вые степени координат, в разложении равны нулю, так как начало координат принадлежит поверхностям тел и оси x, y расположены в касательной плоскости.

Таким образом, расстояние между указанными точками тел определяется однородной функцией, содержащей координаты x и y во второй степени. Поворотом осей x, y можно добиться того, что член ряда, содержащий произведение xy , обратится в нуль. Тогда

$$z_1 + z_2 = Bx^2 + Cy^2, \quad (5.31)$$

где константы B, C определяются геометрией соприкасающихся тел. Можно показать, что они имеют одинаковый знак. В таком случае все равноотстоящие точки проецируются на касательную плоскость в эллипсы с центром в начале координат.

Если к телам приложить нагрузку, удаленную от места их касания с равнодействующей, направленной вдоль оси z , тогда тела начнут деформироваться и в зоне контакта произойдет соединение точек двух тел.

С точностью до членов высшего порядка малости можно принять, что при сжатии тел в соприкосновение приходят те точки, которые

в исходном состоянии лежали на одном перпендикуляре к общей касательной плоскости. Те точки, которые в недеформированном состоянии находились на одинаковом расстоянии друг от друга, определяемом выражением (5.31), приходят в соприкосновение одновременно, образуя в результате поверхность, называемую *поверхностью давления*. Контур этой поверхности называется *контуром давления*.

Учитывая замечания, сделанные в конце предыдущего параграфа, для подсчета напряжений и деформаций в телах 1 и 2 можно воспользоваться соотношениями, полученными при решении задачи о действии нагрузки на полупространство. Интенсивное деформирование наблюдается в областях, прилегающих к поверхности давления, а в точках, достаточно удаленных от нее, деформации оказываются практически равными нулю.

Обозначим перемещения точек тел вдоль осей x, y, z для первого тела через u_1, v_1, w_1 , для второго тела — через u_2, v_2, w_2 , а сближение недеформированных частей тела — через α .

Если в исходном положении расстояние между противоположными точками определялось выражением (5.31), то после сдавливания для точек, оказавшихся на поверхности давления, должно быть справедливо следующее равенство:

$$\alpha - (w_1 + w_2) = Bx^2 + Cy^2. \quad (5.32)$$

Ввиду малости поверхности давления по сравнению с размерами сдавливаемых тел при вычислении w_1, w_2 можно заменить эти тела упругими полупространствами. Тогда, считая касательные напряжения на поверхности давления отсутствующими, для нахождения перемещений w_1, w_2 можно воспользоваться формулой (5.30), полученной для полубесконечного тела:

$$w_1 = \frac{1-\mu_1^2}{\pi E_1} \iint_A \frac{q}{R} dA; \quad w_2 = \frac{1-\mu_2^2}{\pi E_2} \iint_A \frac{q}{R} dA,$$

где μ_1, μ_2, E_1, E_2 — коэффициенты Пуассона и модули упругости первого и второго тела.

Из уравнения (5.32) имеем

$$\left(\frac{1-\mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_A \frac{q}{R} dA = \alpha - Bx^2 - Cy^2. \quad (5.33)$$

Интегрирование ведется по площади поверхности давления тел. Заметим, что эта площадь зависит от q , из чего следует, что уравнение (5.33) является нелинейным. Такая ситуация типична для задач рассматриваемого типа, получивших название *контактных задач теории упругости*. В общем случае, как показал Генрих Герц, контур давления является эллипсом, полуоси которого по направлению